УДК 001.51+161.263

ІМОВІРНІСНА ЛОГІКА З ДВОМА ЗНАЧЕННЯМИ АРГУМЕНТІВ ТА НЕСКІНЧЕННОЮ КІЛЬКІСТЮ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЙ

Ігор Дуцяк

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, Україна, kafilos@franko.lviv.ua

Наведено метод формулювання правил виведення для двозначної пропозиційної логіки у разі, коли логічна імовірність висновку є меншою від 100%. Сформульовано узагальнення щодо принципів побудови правил формулювання припущень на підставі різних логічних теорій.

Ключові слова: пропозиційна логіка, правила виведення, логічна імовірність істинності висновку, гіпотеза.

Метою цього дослідження є побудова такого формального апарата, який давав би змогу отримувати припущення на підставі наявних достовірних знань. Саме такою є найпоширеніша ситуація в практично орієнтованій пізнавальній діяльності (наприклад, в діяльності слідчого у разі формулювання слідчих версій, або в діяльності практичного лікаря, коли він формулює припущення про суть хвороби) і в теоретичній пізнавальній діяльності. У зазначених, як і в усіх подібних випадках, на підставі наявних достовірних знань суб'єкт пізнання формулює усі можливі припущення для того, щоб, перевіривши їхню істинність, прийняти одні з них і відкинути інші. Зважаючи на це, потрібні такі логічні схеми, які давали б змогу свідомо будувати припущення. Отже, якщо на множині засновків частина з них буде задана як істинна, а частина як хибна, то засновки набувають одного з двох значень, тоді як висновки будуть у такому разі мати різні значення імовірності істинності (між 1 і 0, включаючи і 1, і 0). Очевидно, що у реальній пізнавальній діяльності засновки також можуть набувати більше ніж одного значення істинності „істинно". Скажімо, вже навіть використавши імовірнісні висновки, отримані з достовірних знань, як засновки для наступних виводів, ми отримаємо засновки з нескінченною кількістю значень істинності. Тобто, в кінцевому рахунку, актуальною є така система, в якій аргументи також можуть мати довільне з нескінченної кількості значення істинності.

Наявні різні підходи до побудови імовірнісної логіки. Поширеним є підхід, згідно з яким за допомогою математичного апарату теорії імовірності намагаються сформулювати певні кількісні критерії для вибору гіпотез, для оцінки ступеню їх підтвердження емпіричними свідченнями. Зазначений підхід був започаткований у 20 - 30-х роках XX ст. Це системи імовірнісної логіки, побудовані Д. М. Кейнсом, Г. Джеффрісом, Р. Карнапом. Серед українських дослідників у зазначеному напрямі працював В. Костюк [4].

Крім того, імовірнісною логікою називають підхід (сформований також у 20-30-х роках XX ст.), згідно з яким імовірнісну логіку потрібно будувати як багатозначну логіку (див., для прикладу, статті „імовірнісна логіка“ в [2] і [3]). Цей підхід започаткували учені Я. Лукасевич й Е. Л. Пост. Користуючись цим підходом, багатозначну логіку отримують шляхом введення додаткових значень аргументів. Наприклад, у системі Я. Лукасевича [5], крім двох значень („істинно“ і „хибно“), введено третє значення аргументів у сенсі „може бути істинним“ (а отже, й хибним). У системі Д. Бочвара [1] третє значення інтерпретується як відсутність смислу. А далі, вислів осмислений, якщо він є істинний або хибний. Довільну кількість значень аргументів увів Е. Пост [6], система якого є узагальненням двозначної логіки. На підставі тих чи інших міркувань збільшено кількість значень аргументів також у інших багатозначних логічних системах.

Для побудови імовірнісної логіки проаналізуємо можливість набуття функцією більше двох значень уже навіть у разі двох значень аргументів. Ця логічна система буде моделлю одного з методів формулювання припущень на підставі достовірних знань. Крім того, це дасть додаткові підстави для побудови багатозначної логіки, в якій більше двох значень набуватимуть і аргументи, і функція.

Насамперед важливо зазначити, що імовірнісне знання зафіксоване одинадцятьма з шістнадцятьох бінарних логічних термінів. Це стосується функцій f_3, від f_5 до f_7 та від f_9 до f_{15} (див. табл. 1). Кожною з цих функцій позначають, що аргументи x і y мають більше одного варіанта значень істинності. Наприклад, формулою $(x \vee y)$ зафіксовано, що чинним є один із трьох варіантів значень істинності висловів x і y: або обидва ці вислови є істинними, або істинним є тільки один із них.

Таблиця 1

Позначення логічних термінів

x y	Булеві функції															
	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
1 1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1 0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0 1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0 0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Водночас для кожної з тих двохаргументних булевих функцій, якими зафіксовано більше одного можливого варіанта поєднань значень істинності аргументів, можна сформулювати імовірність істинності кожного з аргументів зокрема. Для прикладу проаналізуємо імовірність істинності кожного з аргументів для функції f_{14}, тобто для диз'юнктивного вислову. Мовлячи диз'юнктивний вислів зі стверджувальною інтонацією чи надаючи стверджувальної форми такому вислову в разі письмового мовлення, суб'єкт мовлення подає його адресатові мовлення як фактично істинний. У разі, коли диз'юнктивний вислів позначено як істинний, обидва вислови-складники цього вислову позначено як істинні або як такі, що мають протилежні значення істинності (див. табл. нижче).

x y	$(x \vee y)$
1 1	1
1 0	1
0 1	1

У такому разі, вислів *x* є істинним у двох із трьох випадків, отже імовірність істинності цього вислову дорівнює $(2/3)\cdot 100 = 67\%$. Те саме можна сказати про імовірність істинності вислову *y*, тобто ймовірність істинності вислову *y* також дорівнює 67%.

Аналіз, який вище наведено для диз'юнктивного вислову, можна зробити не тільки для функцій, які позначають більше одного варіанта значень істинності висловів-складників, але й для решти функцій, тобто для тих, які однозначно фіксують значення істинності аргументів (див. табл. нижче; в дужках наведено значення імовірності істинності відповідного вислову).

Для двохаргументних булевих функцій, у разі двох змінних, значення функції може набувати одне з п'яти значень (0; 0,33; 0,5; 0,67; 1), відповідно до ступеня імовірності, зафіксованого у наведеній таблиці. Водночас зі збільшенням кількості змінних, кількість можливих варіантів значень аргументів буде постійно подвоюватися. Відповідно - постійно зростатиме кількість варіантів значень функції, яка за прямування кількості змінних до нескінченності також прямуватиме до нескін-

1.	(p f1 q) = q (0%); p (0%).
2.	(p f2 q) = q (0%); p (100%).
3.	(p f3 q) = q (0%); p (50%).
4.	(p f4 q) = q (100%); p (0%).
5.	(p f5 q) = q (50%); p (0%).
6.	(p f6 q) = q (50%); p (50%).
7.	(p f7 q) = q (33%); p (33%).
8.	(p f8 q) = q (100%); p (100%).
9.	(p f9 q) = q (50%); p (50%).
10.	(p f10 q) = q (50%); p (100%).
11.	(p f11 q) = q (33%); p (67%).
12.	(p f12 q) = q (100%); p (50%).
13.	(p f13 q) = q (67%); p (33%).
14.	(p f14 q) = q (67%); p (67%).
15.	(p f15 q) = q (50%); p (50%).

ченності, тоді як кількість значень аргументів буде залишатися рівною двом („істинно“, тобто 1, або „хибно“, тобто 0).

Імовірність можна визначати також для певного конкретного поєднання значень істинності довільної кількості простих висловів (аргументів), які є елементами складних висловів у певному тексті, тобто в певній послідовності висловів. Для прикладу, щодо кожної з булевих функцій можна сформулювати імовірність істинності того чи іншого поєднання значень її аргументів. Візьмемо одну з двохаргументних булевих функцій – диз'юнкцію. Стверджуючи будь-який, у тому числі диз'юнктивний, вислів, суб'єкт мовлення (незалежно від фізичної природи знаків: чи це усне мовлення, чи письмове, чи здійснюється воно жестами, чи шрифтом Брайля, чи в електронному вигляді) подає цей вислів як істинний. Стверджуючи, що диз'юнктивний вислів ($x \vee y$) є істинним, мовець позначає диз'юнкцією, що вислови x і y мають один із трьох варіантів значень істинності (або вони обидва є істинними, або істинним є тільки один із них). У такому разі імовірність істинності кожного з цих варіантів дорівнює $(1/3)\cdot 100 = 33\%$, тоді як імовірність того, що обидва аргументи є хибними, дорівнює 0%. Схожим чином можна легко отримати значення імовірності істинності тих чи інших поєднань значень істинності аргументів для кожної з шістнадцяти булевих функцій, чи для будь-якої з n-аргументних булевих функцій. Скажімо, для кон'юнктивного вислову імовірність істинності обох простих висловів-складників дорівнює 100%, тоді як імовірність того, що перший вислів-складник є істинним, а другий – хибним, чи навпаки, чи вони обидва є хибними, дорівнює 0%.

Проаналізуємо приклад застосування зазначених міркувань для формулювання припущень. Нехай маємо диз'юнктивний вислів: *У мережі розрив або відсутня напруга*. Цим реченням суб'єкт мовлення пояснює причину того, що лампа розжарювання в певному приміщенні не засвітилася після натискання вмикача. Як припущення, може бути сформульовано кожен із трьох логічно можливих варіантів значень істинності простих висловів-складників цього складного вислову: або обидва прості вислови-складники є істинні, або перший істинний, а другий – ні, або навпаки. Імовірність істинності кожного з цих трьох припущень дорівнює 33%.

Таким чином можна визначати імовірність припущень про значення істинності кількох простих висловів, які є елементами послідовності висловів (тобто тексту) чи елементами складних висловів, що входять до тексту. Проаналізуємо, для прикладу, такий текст із двох речень: Прибуток або втрата. Неправда, що є прибуток. Позначивши прості вислови, які містяться в цій послідовності висловів символами (x – прибуток, y – втрата), запишемо цю послідовність висловів у символьному вигляді таким чином: $(x \bar{\wedge} y)$, $\bar{x}$. Стверджуючи ці вислови, суб’єкт мовлення позначив тим самим кожен із них як фактично істинний. Об’єднавши їх кон’юнкцією (кожен із висловів суб’єкт мовлення подає як фактично істинний) і побудувавши таблицю істинності, отримаємо, що вислови x і y можуть мати один із двох варіантів значень істинності: або x хибне, а y істинне, або і x, і y хибне. Оскільки цих варіантів є два, то імовірність кожного з них дорівнює 50%.

Наведений вище підхід може бути застосований також для формулювання та оцінки ймовірності припущень у разі, коли текст містить не тільки асерторичні чи аподиктичні вислови, але й імовірні вислови. Йдеться про те, що суб’єкт мовлення може подавати кожен із висловів тексту не як істинний, а як такий, що є істинним з певним ступенем імовірності (меншим від 100%). Візьмемо для прикладу диз’юнктивний вислів $(x \vee y)$. Якщо суб’єкт мовлення не переконаний, що зв’язок між ознаками (явищами) описується диз’юнкцією і суб’єктивно оцінює імовірність істинності цього вислову 80% (див. табл. нижче), то імовірність кожного з трьох варіантів поєднань значень істинності x і y дорівнює $(1/3) \cdot 80\% = 26{,}7\%$.

x y	(x ∨ y)
1 1	0,8
1 0	0,8
0 1	0,8

Імовірність істинності вислову x, так само як і імовірність істинності вислову y, дорівнює $(2/3) \cdot 80\% = 53{,}3\%$. Аналогічним чином можна визначити імовірність істинності простих висловів чи якогось із можливих видів зв’язку між простими висловами, які є елементами тексту, тобто послідовності висловів, у разі коли усі чи частина висловів подані суб’єктом мовлення не як фактично істинні, а як істинні з певним ступенем імовірності. Можливі різні підстави для надання висловам різного ступеня імовірності. Для прикладу, Н. Решер [7], аналізуючи методи формулювання правдоподібних висновків за наявності суперечності в інформації, що надійшла з різних джерел, надає кожному вислову певний ступінь імовірності відповідно до надійності джерела. У зазначеній монографії Н. Решер аналізує також інший варіант ранжування висловів за ступенем імовірності. Така ситуація, на його думку, наявна в науковій пізнавальній діяльності, де можна виділити чотири рівні обґрунтованості висловів: 1) тези (імовірність – 1,0); 2) основні принципи, тобто майже безспірні тези (імовірність – 0, 75); 3) добре підтримані положення (імовірність – 0,5) і 4) гіпотези (імовірність – 0,25). Відомі також інші варіанти підстав для ранжування висловів за ступенем імовірності, скажімо, різний ступінь імовірності можна надавати відповідно до суб'єктивної оцінки ймовірності істинності того чи іншого вислову суб'єктом мовлення (мислення).

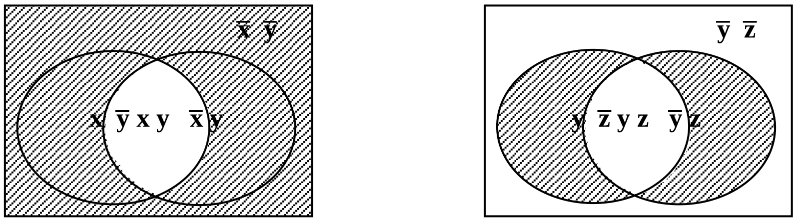
Наведені вище значення імовірності істинності висловів можуть бути використані не тільки для формулювання припущень, але й для виявлення несумісності знань. Скажімо, маємо таку послідовність висловів: $(x \wedge y)$, $(y \leftrightarrow z)$. Оскільки еквіваленція позначає, що вислови (в даному прикладі y і z) мають однакові значення істинності, то напрошується думка, що в формулі $(x \wedge y)$ можна замінити y на z і отримати висновок $(x \wedge z)$. Тобто, мало б бути чинним таке правило:

$$\frac{(x \wedge y),\ (y \leftrightarrow z)}{(x \wedge z)}$$

Чинність цього правила підтверджує також метатеорема дедукції: об'єднавши засновки між собою кон'юнкцією, а засновки і висновок – імплікацією і, побудувавши таблицю істинності отриманої формули, отримаємо, що вона є тотожноістинною, а отже, вислів $(x \wedge z)$ випливає з висловів $(x \wedge y)$ і $(y \leftrightarrow z)$.

Однак кон'юнкцією (функція f_8) зафіксовано, що і ймовірність істинності вислову x, і ймовірність істинності вислову y дорівнюють 100%, тоді як еквіваленцією (функція f_9) зафіксовано, що ймовірність істинності вислову y дорівнює 50%. Отже, першим і другим засновком подано несумісні значення істинності вислову y: згідно з першим засновком, цей вислів не може бути хибним, а згідно з другим – може.

Для унаочнення цю суперечність можна відтворити на діаграмах Венна. Проінтерпретувавши булеві функції як однозначні відношення між множинами і відтворивши їх діаграмами Венна, отримаємо для аналізованих засновків діаграми, зображені на рис. 1. Функції $(x \wedge y)$, відповідно до зображеного діаграмою відношення обсягів, відповідає вислів „Усі x і тільки x є y, за умови, що об'єкти, які не є ні x, ні y не існують", а функції $(y \leftrightarrow z)$ відповідає вислів „Усі y і тільки y є z, за умови, що об'єкти, які не є ні y, ні z існують".



а) *б*)

Рис. 1. Діаграми Венна, відповідні:
а – кон’юнкції, *б* – еквіваленції

З діаграм легко побачити, що згідно з першим засновком ($x \wedge y$), зафіксованим на рис. 1, *а*, об’єкти, які не є y, не існують, тоді як згідно з другим засновком ($y \leftrightarrow z$), зафіксованим на рис. 1, *б*, об’єкти, які не є y, існують. Іншими словами, відповідно до функції ($x \wedge y$) аргумент y дорівнює універсуму, а відповідно до функції ($y \leftrightarrow z$) аргумент y менший універсуму. Отже, незважаючи на те, що за метатеоремою дедукції з таких засновків можна отримати висновок, насправді вони є несумісними.

Щодо аналізованого аспекту несумісності знань, вона може з’являтися в кількох випадках. Це зумовлене тим, що тією чи іншою булевою функцією певний аргумент може бути ототожнений з універсумом (імовірність істинності аргументу дорівнює 100%), з порожньою множиною (імовірність дорівнює 0%) і з непорожньою підмножиною універсуму (імовірність більша 0%, але менша 100%). Отже, якщо одним із висловів аналізованої послідовності висловів певний простий вислів ототожнено з універсумом (або порожньою множиною чи непорожньою підмножиною універсуму), то в усіх наступних входженнях цього вислову в текст він також повинен ототожнюватися, відповідно, з універсумом (або порожньою множиною чи непорожньою підмножиною універсуму). Якщо в одному вислові послідовності простий вислів-складник ототожнено з одним із трьох вищезазначених, а в іншому – з іншим, то є підстави для твердження про наявність суперечності.

Схема виявлення значень імовірностей істинності простих висловів, зафіксованих двохаргументними булевими функціями, може бути використана як основа для виявлення значень імовірностей істинності простих висловів, які є елементами складних висловів довільної складності, а також послідовностей складних висловів (що відповідають послідовностям речень у текстах).

Можливі принаймні два взаємопов’язані підходи до аналізу методів формулювання припущень вищенаведеного типу. З одного боку, можна взяти довільне правило виведення (з довільного розділу алетичної логіки), яке дає достовірний висновок і вилучити один із засновків, у такому разі той висновок, який у вихідному правилі оцінювався як достовірний, у похідному правилі буде оцінюватися як можливий (імовірність істинності якого менша 100%).

З іншого боку, для довільної послідовності висловів можна визначити всі логічно можливі варіанти поєднань значень істинності простих висловів-складників. Кожен із цих варіантів можна формулювати як припущення. У такому разі поняття „правило виведення“ певною мірою втрачає сенс, оскільки виявлені для довільного поєднання висловів можливі значення істинності (в тому числі, коли якісь із цих висловів повинні набувати тільки одне визначене значення істинності, тобто, коли щодо них можна сформулювати достовірний висновок), власне, і являють собою в поєднанні з цими висловами правило виводу. Кожна послідовність висловів у поєднанні з висловами, істинність яких (достовірно чи ймовірно) випливає з них, являє собою правило виведення.

Проаналізуємо перший із зазначених підходів, тобто отримання правил формулювання припущень (імовірних висновків), шляхом вилучення частин тих правил, які дають однозначні, тобто достовірні виводи. Візьмемо для прикладу довільне правило, яке дає достовірний висновок, наприклад modus ponens. Якщо правило $((p \lor q), \ \overline{p}\ ) = q$ дає достовірний висновок, то вилучивши довільну частину засновків, отримаємо правила, які дають імовірний висновок. Отже, в аналізованому прикладі отримаємо два правила: $(p \lor q) \approx q$ і $\overline{p} \approx q$, де символом $\approx$ позначено таке випливання, за якого висновок є лише ймовірним (в сенсі, якщо його ймовірність менша від 100%). Водночас у правилі $\overline{p} \approx q$ висновок жодним чином не пов’язаний із засновком (у засновку відсутнє формулювання вилову q). Це не означає, що робити таке припущення не можна, принаймні воно не суперечить засновку, і вже через це є підстави для його формулювання. Крім відсутності суперечності між висновком і засновком немає жодних інших підстав (знань), які стали б підставою для формулювання припущення про істинність вислову q. Тобто на відміну від правила $(p \lor q) \approx q$, правило $\overline{p} \approx q$ є слабше обґрунтоване. Щодо правила $(p \lor q) \approx q$, то можна визначити імовірність істинності висновку (див. вище).

У проаналізованому прикладі правило виведення $(p \lor q) \approx q$ ґрунтоване на властивостях однієї із шістнадцяти булевих функцій. Водночас можливі складніші поєднання засновків, вилучивши один з яких отримаємо більше однієї двохаргументної булевої функції. У таких випадках задачу легко розв’язати шляхом аналогічним до того, який було описано для двохаргументних булевих функцій. Поєднавши засновки (вислови, наявні в аналізованому тексті) кон’юнкцією, потрібно побудувати таблицю істинності отриманої формули і для тих значень, коли формула набуває значення „істинно“ з’ясувати значення істинності, яких може набувати кожен із аргументів. Може бути використаний і метод приведення до досконалої диз'юнктивної нормальної форми, і метод аналітичних таблиць.

Описаний формальний апарат не є методом формулювання якісно нових висловів, тобто якісно нових знань. Однак він дає змогу виявляти в системі висловів такі, про які не зафіксовано однозначно ні те, що вони є істинними, ні те, що вони є хибними. Це дає змогу формулювати припущення про фактичну істинність тих висловів, які логічно можуть бути істинними. Отже, підхід, запропонований у даній статті, може бути використаний для формулювання припущень як у процесі практично орієнтованої, так і в процесі теоретичної пізнавальної діяльності.

Узагальнюючи підхід до формулювання припущень, описаний у цій статті, важливо зазначити таке: гіпотези наявні там, де є неповнота інформації, що можна тлумачити як неповноту засновків. Отже, для створення правил формулювання гіпотез потрібно: 1) виявити правила, необхідні для однозначного висновку; 2) вилучаючи як невідомі окремі частини засновків у цих правилах, отримаємо правила ймовірнісних виводів.

1. Бочвар Д. А. Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического функционального исчисления // Математический сборник. – 1938. – Т.4. – №2. – С. 287–308.
2. Ивин А. А., Никифоров А. Л. Словарь по логике. – М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 1997. – 384 с.
3. Кондаков Н. И. Логический словарь-справочник. – М.: Наука, 1975. – 720 с.
4. Костюк В. М. Підтвердження та вибір гіпотези в науковому дослідженні. К.: Вид-во КДУ, 1973. – 176 с.
5. Łukasiewicz J. O logice trójwartościowey // Ruch Filozoficzny. – 1920. – T.5. – S. 170–171.
6. Post E. Introduction to a General Theory of Elementary Propositions //American Journal of Mathematics. – 1921. – Vol.43. – N 3. – P. 163–185.
7. Rescher N. Plausible Reasoning. An Introduction to the Theory and Practice of Plausibilistic Inference. – Assen - Amsterdam: Van Gorcum & Comp. B.V., 1976. –124 p.

PROBABILISTIC LOGIC WITH TWO VALUES OF ARGUMENTS AND ENDLESS AMOUNT OF VALUES OF FUNCTIONS

Ihor Dutsyak

L'viv Ivan Franko National University, Universytets'ka Str., 1, L'viv, 79000, Ukraine, kafilos@franko.lviv:ua

Method of formulation of determination rules for two-meaning proposition logic in case when logical probability of conclusion is less than 100% was given. Generalisation of principles of construction of rules of supposition formulation due to different logical theories was formulated.

Key words: proposition logic, determination rules, logical probability of true conclusion, hypothesis.

Стаття надійшла до редколегії 12.03.2005
Прийнята до друку 24.09.2005